sich aus (75)

$$\Theta_1 = 2\,\frac{M_2}{l}\left(1+\frac{1}{v_1{}^2}\right). \tag{78}$$

Denselben Wert findet man — wie es sein muß —, wenn man die Bahn eines Probeteilchens in einem SCHWARZSCHILD-Feld, das der Koordinatenbedingung (1) gehorcht, in erster Näherung berechnet. Für $v_1 = 1$ folgt aus (78) der bekannte Wert für die Lichtablenkung:

$$\Theta_1 = 4\,M_2/l\,. \tag{79}$$

Ich bin Herrn Prof. PAPAPETROU für die Anregung zu diesen Untersuchungen und für viele wertvolle Diskussionen zu großem Dank verpflichtet.

Zur Gravitationsstrahlung nach BEL[1]

Von D. GEISSLER

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Leipzig
(Z. Naturforschg. **14 a**, 696—698 [1959]; eingegangen am 21. April 1959)

Die Ergebnisse von BEL[1] werden auf das Gravitationsstrahlungsfeld eines zeitweise nichtstationären Systems angewendet.

Die Schwierigkeiten, die das Problem der Gravitationsstrahlung in der allgemeinen Relativitätstheorie bietet, rühren bekanntlich vor allem davon her, daß man bei der Formulierung eines differentiellen Erhaltungssatzes für Energie und Impuls eines Systems, das allgemein aus Materie und zugehörigem Gravitationsfeld besteht, einen Pseudotensor einführen muß, eine Größe also, die sich nur bei linearen, nicht aber bei allgemeineren Koordinatentransformationen wie ein Tensor verhält. Wegen dieser mangelnden Kovarianz des Pseudotensors $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$ der Energie-Impuls-Dichte des Gravitationsfeldes ist es oft nur schwer möglich, die physikalische Realität der damit erhaltenen Ergebnisse zu erkennen, z. B. also festzustellen, ob eine in einem bestimmten Koordinatensystem nicht verschwindende Strömung von Gravitationsenergie in einem anderen Koordinatensystem nicht doch zu Null wird.

Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten hat nun kürzlich BEL[1] versucht, indem er einen (echten) Tensor vierter Stufe angibt, der bemerkenswerte Analogien zum Energie-Impuls-Tensor des MAXWELL-Feldes aufweist und mit dessen Hilfe ein „Gravitationsstrahlungszustand" definiert wird.

Andererseits konnte vor kurzem gezeigt werden[2], daß die von einem zeitweilig nichtstationären System emittierte Gravitationsstrahlung eine nicht verschwindende Gesamtenergie besitzt, die sich nicht durch Koordinatentransformationen zu Null machen läßt. Obwohl hierbei die Gesamtenergie in der üblichen Weise, d. h. unter Verwendung des Pseudotensors $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$ definiert wird, ist das Ergebnis kovariant, was mit Hilfe der von WEYL[3] angegebenen integralen Form des allgemein-relativistischen Energie-Impuls-Satzes erreicht wird.

Es wird daher von Interesse sein, den Tensor von BEL für das Strahlungsfeld eines während einer endlichen Zeit nichtstationären Systems explizit auszurechnen und auf seinen physikalischen Gehalt zu untersuchen. Das soll im folgenden getan werden.

Der „Energie-Impuls"-Tensor von BEL ist definiert durch[4]

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = A\,g_{\alpha\beta}\,g_{\mu\nu} - M_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{1}$$

mit der Invarianten

$$A = \frac{1}{8}\,R^{\alpha\beta\mu\nu}\,R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{2}$$

und dem Tensor

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\varrho}{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu}\,R_{\varrho\beta\sigma\nu} + R^{\varrho}{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\nu}\,R_{\varrho\beta\sigma\mu}\,. \tag{3}$$

Dabei ist $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ der RIEMANNsche Krümmungstensor.

Wir betrachten nun ein makroskopisches System, das (dauernd) in der Nähe des Koordinatenursprungs lokalisiert ist und sich zu den Zeiten $t<0$ sowie $t>T$ (T endlich) in einem stationären Zustand befindet, im Zeitintervall $0 \leqq t \leqq T$ dagegen Gravitationsstrahlung aussendet. Das von diesem System erzeugte Gravitationsfeld[2] hängt für

[1] L. BEL, C. R. Acad. Sci., Paris **247**, 1094 [1958]; **246**, 3015 [1958].

[2] D. GEISSLER, A. PAPAPETROU u. H. TREDER, Ann. Phys., Lpz. (7) **2**, 344 [1959].

[3] H. WEYL, Raum—Zeit—Materie, Springer-Verlag, Berlin 1923, §§ 37, 38.

[4] $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3$; $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$.

alle Zeiten $t \gg T$ nur in einem Gebiet von der Form einer Kugelschale S der Dicke cT, deren Radius sich nach Ergebnissen von LICHNEROWICZ[5] mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnt, von der Zeit ab, während es innerhalb und außerhalb der Kugelschale stationär ist. Das in S lokalisierte Strahlungsfeld ist für Zeiten $t \gg T$ sicher schwach, da dann die Entfernung r eines beliebigen Punktes in S vom System (im Ursprung) sehr groß gegen dessen räumliche Ausdehnung ist.

Unter diesen Umständen haben die Feldgrößen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ des Strahlungsfeldes in erster Näherung in $1/r$ die von FOCK[6] angegebene Form:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= 1 + \frac{4\,G\,M}{c^2\,r} + \frac{2\,G}{c^2\,r} D^{rs}{}_{,rs}\,; \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \qquad\qquad\; - \frac{2\,G}{c^2\,r} D^{ir}{}_{,0r}\,, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -\delta^{ik} \qquad\;\; + \frac{2\,G}{c^2\,r} D^{ik}{}_{,00}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dabei bedeutet G die NEWTONsche Gravitationskonstante,

$$M = \int \varrho \, \mathrm{d}V \tag{5}$$

die Gesamtmasse und

$$D^{rs} \equiv D^{rs}(\tau) = \int \varrho \, x^r \, x^s \, \mathrm{d}V, \quad \tau = x^0 - r \tag{6}$$

die retardierten Trägheitsmomente der betrachteten Massenverteilung. Die Integrale in (5) und (6) sind über die Hyperebene $x^0 = c\,t = \text{const}$ zu nehmen.

Wir definieren nun einen Nullvektor[7]

$$\left.\begin{aligned} n^\alpha &= \{n^0, n^i\} = \left\{1, \frac{x^i}{r}\right\}, \\ n_\alpha &= \{n_0, n_i\} = \left\{1, -\frac{x^i}{r}\right\}, \end{aligned} \qquad n_\alpha \, n^\alpha = 0 \right\} \tag{7}$$

und weiterhin die Größen

$$N^\alpha_m = -n_m \, \delta^\alpha_0 + n_0 \, \delta^\alpha_m \tag{8}$$

mit der Eigenschaft $\qquad n_\alpha N^\alpha_m = 0\,. \qquad (9)$

Aus (6) ergibt sich dann wegen (7) für die Ableitungen der D^{rs} die Beziehung

$$D^{rs}{}_{,\alpha\beta} = n_\alpha \, n_\beta \, \ddot{D}^{rs}\,, \tag{10}$$

wobei die Punkte Ableitungen nach τ (oder x^0) bedeuten. Damit und mit (8) bekommen wir aus (4):

$$k^{\mu\nu} \equiv \mathfrak{g}^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} = K \, N^\mu_m \, N^\nu_n \, \ddot{D}^{mn} + B^{\mu\nu} \tag{11}$$

mit der Abkürzung $\qquad K \equiv K(r) = \dfrac{2\,G}{c^2\,r}\,. \qquad (12)$

Die Größen K, N^μ_m und $B^{\mu\nu}$ sind in dem Sinne als konstant zu betrachten, als ihre Ableitungen nach x^ϱ entweder verschwinden oder zu Termen höherer Ordnung in $1/r$ führen. Mit Hilfe von (10) erhalten wir daher aus (11)

$$k^{\mu\nu}{}_{,\varrho\sigma} = K \, n_\varrho \, n_\sigma \, N^\mu_m \, N^\nu_n \, F^{mn}\,, \tag{13}$$

wobei noch $\qquad F^{mn} \equiv \ddddot{D}^{mn} \qquad (14)$

gesetzt worden ist.

Der RIEMANNsche Krümmungstensor lautet in erster Näherung

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(h_{\alpha\mu,\beta\nu} + h_{\beta\nu,\alpha\mu} - h_{\alpha\nu,\beta\mu} - h_{\beta\mu,\alpha\nu})\,, \tag{15}$$

$$h_{\varrho\sigma} = g_{\varrho\sigma} - \eta_{\varrho\sigma} = (\tfrac{1}{2}\,\eta_{\varrho\sigma}\,\eta_{\mu\nu} - \eta_{\varrho\mu}\,\eta_{\sigma\nu})\; k^{\mu\nu}\,. \tag{16}$$

Man rechnet leicht nach, daß $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ wegen (7), (9) und (13) in unserem Fall folgende Eigenschaften hat:

$$n^\alpha \, R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0\,, \tag{17}$$

$$n_\alpha \, R_{\beta\gamma\mu\nu} + n_\beta \, R_{\gamma\alpha\mu\nu} + n_\gamma \, R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0\,. \tag{18}$$

Daher sollte nach BEL[1] der durch (1) bis (3) definierte Tensor $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ die Form

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = -4\,\sigma^2 \, n_\alpha \, n_\beta \, n_\mu \, n_\nu \tag{19}$$

haben.

Um $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ explizit zu berechnen, brauchen wir zunächst die Invariante A, Gl. (2). Für sie gilt nach LANCZOS[8] (unter der Voraussetzung $R_{\alpha\beta} = \text{const} \cdot g_{\alpha\beta}$) die Beziehung

$$R^{\alpha\beta\lambda}{}_\mu \, R_{\alpha\beta\lambda\nu} = 2\,A\,g_{\mu\nu}\,. \tag{20}$$

Wenn nun (17) mit einem *beliebigen* Nullvektor n^α (bei dem nicht sämtliche Komponenten verschwinden) erfüllt ist, folgt aus (20) durch Multiplikation mit n^ν:

$$A = 0\,. \tag{21}$$

Für den zweiten Term in der Definition (1) von $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ erhält man aus (3), (15), (16), (13) und (9)

[5] A. LICHNEROWICZ, Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme, Masson & Cie., Paris 1955, Kapitel 2 u. 3.

[6] V. A. FOCK, Rev. Mod. Phys. **29**, 325 [1957]; vgl. auch D. GEISSLER, Z. Naturforschg. **14a**, 689 [1959], voranstehende Arbeit. Das Feld (4) erfüllt die Koordinatenbedingung $\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$.

[7] n^α ist zunächst ein Nullvektor bezüglich MINKOWSKIscher Metrik: $ds^2 = \eta_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$ ($\eta_{00} = 1$, $\eta_{0i} = 0$, $\eta_{ik} = -\delta_{ik}$). Da aber n^α bei den $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ stets nur in Termen $\propto r^{-1}$ auftritt und wir Terme zweiter und höherer Ordnung in $1/r$ bei den $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ vernachlässigen, dürfen wir in unserer ersten Näherung n^α als Nullvektor der allgemeinen Metrik $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$ auffassen.

[8] C. LANCZOS, Ann. Math. **39**, 842 [1938].

nach einiger Rechnung

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} = \tfrac{1}{2} K^2 H\, n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu\,, \tag{22}$$

$$H = F^{rs} F^{rs} - \tfrac{1}{2}(F^{rr})^2 - 2\, n_r n_s F^{rm} F^{sm} + n_r n_s F^{rs} F^{mm} + \tfrac{1}{2}(n_r n_s F^{rs})^2\,. \tag{23}$$

Für $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ folgt dann aus (1), (21) und (22)

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = -\tfrac{1}{2} K^2 H\, n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu\,. \tag{24}$$

Man überzeugt sich leicht, daß H im Spezialfall $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$ positiv (oder Null) ist. Wegen der Invarianz von H gegen räumliche Drehungen gilt daher allgemein

$$H \geqq 0\,, \tag{25}$$

so daß $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ in der Tat die Form (19) mit

$$\sigma^2 = \frac{1}{8} K^2 H = \frac{1}{2} \frac{G^2}{c^4 r^2} H \tag{26}$$

besitzt.

Mit Hilfe eines beliebigen zeitartigen Einheitsvektors u^ϱ $(u_\varrho u^\varrho = 1)$ werden der Vektor

$$P_\varrho(u) = (\delta^\alpha_\varrho - u_\varrho u^\alpha)\, T_{\alpha\beta\mu\nu} u^\beta u^\mu u^\nu \tag{27}$$

und der Skalar

$$V(u) = -\tfrac{1}{2} T_{\alpha\beta\mu\nu} u^\alpha u^\beta u^\mu u^\nu \geqq 0 \tag{28}$$

definiert. Nach den Ergebnissen von BEL bestehen nun formale Analogien zwischen P_i und dem POYNTING-Vektor sowie zwischen V und der Energiedichte des MAXWELL-Feldes. Insbesondere wird nach BEL ein (lokaler) „Gravitationsstrahlungszustand" durch $P_\varrho \neq 0$ charakterisiert.

Wenden wir das nun auf das von uns betrachtete Feld an, und zwar – der Übersichtlichkeit halber – für $u^0 = 1$, $u^i = 0$, so wird nach (27), (24) und (12)

$$P_0 = 0\,, \quad P_i = T_{i000} = -\frac{2\,G^2}{c^4 r^2} H\, n_i \neq 0\,. \tag{29}$$

Unser Feld gehört daher zu einem Strahlungszustand im Sinne der Definition von BEL.

Um P_i als wirkliche Energiestromdichte auffassen zu können, müßte man einen konstanten Faktor a der Dimension $\mathrm{g\cdot cm^4\cdot sec^{-3}}$ einführen:

$$p_i = a\, P_i \quad [= \text{Energiestromdichte}].$$

Damit ergäbe sich für die Energie $\mathrm{d}I$, die pro sec durch ein in der Richtung n_r gelegenes Flächenelement $\mathrm{d}f = r^2\, \mathrm{d}\omega$ hindurchströmt, der Wert

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I &= \frac{2\,G^2}{c^4} a\, H\, \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{2\,G^2}{c^4} a \Big[\ddddot{D}^{rs} \ddddot{D}^{rs} - \tfrac{1}{2}(\ddddot{D}^{rr})^2 - 2\, n_r n_s \ddddot{D}^{rm} \ddddot{D}^{sm} \\ &\qquad + n_r n_s \ddddot{D}^{rs} \ddddot{D}^{mm} + \tfrac{1}{2}(n_r n_s \ddddot{D}^{rs})^2\Big]\, \mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{30}$$

und für die gesamte pro sec abgestrahlte Energie $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ bekäme man daraus durch Integration über den vollen Raumwinkel:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{16}{15} \pi a \frac{G^2}{c^4} \left(3\, \ddddot{D}^{rs} \ddddot{D}^{rs} - \ddddot{D}^{rr} \ddddot{D}^{ss}\right). \tag{31}$$

Die Formeln (30) und (31) sehen ganz ähnlich aus wie diejenigen, die man erhält, wenn man die entsprechenden Größen auf die übliche Art, d. h. mit Hilfe des Pseudotensors $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$, berechnet[2, 9], unterscheiden sich aber in zwei wesentlichen Punkten:

1. Der konstante Faktor ist anders. Während sich bei der Rechnung mit $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$ zwanglos die richtige Dimension für $\mathrm{d}I$ und $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ ergibt, tritt in (30) und (31) der ad hoc eingeführte Dimensionsfaktor a auf. Dieser läßt sich durch keine Kombination der beiden Fundamentalkonstanten G und c allein darstellen.

2. Bei der Rechnung mit $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$ treten *dritte*, in (30) und (31) dagegen *vierte* zeitliche Ableitungen der D^{rs} auf. Nun charakterisieren die dritten Ableitungen des Quadrupolmoments[10] – wie uns vom elektromagnetischen Feld her vertraut ist – die Quadrupolstrahlung; für die vierten Ableitungen der D^{rs} bietet sich dagegen keine einfache physikalische Deutung an.

Eine weitere Schwierigkeit für eine direkte Interpretation der Ergebnisse von BEL besteht darin, daß der Tensor $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ von vierter Stufe ist, während man sonst nur Energie-Impuls-Tensoren zweiter Stufe kennt.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Die von BEL definierten Größen $T_{\alpha\beta\mu\nu}$, P_ϱ und V, die den großen Vorteil der Kovarianz besitzen, zeigen sehr interessante Analogien zum Energie-Impuls-Tensor, zum POYNTING-Vektor bzw. zur Energiedichte des MAXWELL-Feldes. Die Anwendung der Ergebnisse von BEL auf den Fall des Strahlungsfeldes eines zeitweilig nichtstationären Systems führt indessen zu Schwierigkeiten bei der physikalischen Deutung und zeigt die formale Natur dieser Analogien.

Ich danke Herrn Professor PAPAPETROU für die Anregung zu dieser Arbeit.

[9] A. EINSTEIN, S.B. Preuß. Akad. Wiss., Berlin 1918, S. 154; L. LANDAU u. E. LIFSCHITZ, The Classical Theory of Fields, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge (Mass.) 1951, Kapitel 11, § 12. Bei LANDAU-LIFSCHITZ ist D^{rs} nicht wie hier [Gl. (6)], sondern durch $D^{rs} = \int \varrho\,(3\, x^r x^s - \delta^{rs} x^m x^m)\, \mathrm{d}V$ definiert.

[10] D^{rs} ist ja im wesentlichen das Quadrupolmoment der Massenverteilung.